Zur Axiomatik der Geometrie - Strahlensatz

Leopold Peczar, Wien

Die Punkte: A,B,C,...,P,Q,..., Geraden: a,b,c,...,g,h,... und Ebenen: $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\epsilon,\varphi,\ldots$ sind die Elemente der Geometrie. Dabei werden die Geraden und die Ebenen als Punktmengen aufgefaßt. $A \in g$ bedeutet: A ist ein Element von g; A liegt auf g und g geht durch A. B liegt nicht auf g wird $B \notin g$ geschrieben. Analoges bedeuten $P \in \epsilon$, bzw. $Q \notin \epsilon$ für die Inzidenz von Punkt und Ebene.

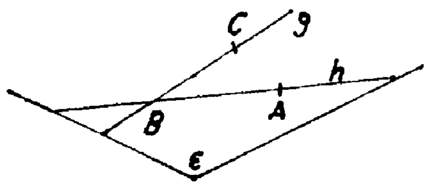
Ax 1 (Axiom 1): Zwei verschiedene Punkte $A(\neq)$, B bestimmen eindeutig eine Gerade g auf der sie liegen; $g = AB$.

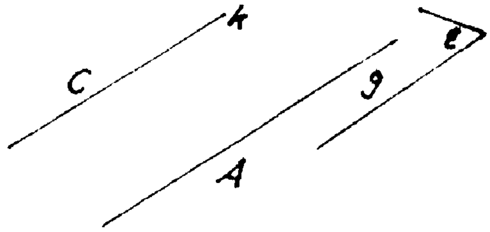
Ax 2: Auf einer Geraden gibt es mindestens zwei Punkte und ebenso gibt es wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Ax 3: Drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A,B,C legen eindeutig eine Ebene ϵ fest; $\epsilon = ABC$. In jeder Ebene liegt stets ein Punkt. Es gibt mindestens vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.

Ax 4: Sind $A(\neq)$, B zwei Punkte einer Ebene ϵ, so liegt auch jeder Punkt von $g = AB$ in ϵ. g ist Teilmenge von ϵ; $g \subset \epsilon$. Damit erkennt man, daß $\epsilon = ABC$ auch durch $g(= BC)$ und $A(\notin g)$ und ebenso durch $g(= CB)$, $h(= BA)$ - $g \cap h = \{B\}$ - zwei sich schneidende Gerade bestimmt ist.

Ax 5: (Parallelenaxiom): Ist $C \notin g$, so gibt es in $\varepsilon = gC$ durch C genau eine Gerade k, die g nicht schneidet. k nennt man zu g parallel.





Nach Ax 2 gibt es auf g einen Punkt A und g ist die nach Ax 5 eindeutig existierende Gerade in $\varepsilon = kA$, die k nicht schneidet. D.h. g ist auch umgekehrt zu k parallel. Das Parallelsein ist eine symmetrische Beziehung. Sie ist auch transitiv. Aus $g \parallel h, h \parallel k$ folgt $g \parallel k$. Denn $g \cap k = \{S\}$ würde einen Widerspruch zu Ax 5 bedeuten, daß es durch S zwei Parallele zu h gäbe.

Nun sieht man auch, daß eine Ebene durch zwei parallele Gerade festgelegt werden kann. Aufgrund der Axiome 1 und 5 erkennt man, daß zwei Gerade einer Ebene entweder einen Schnittpunkt haben oder zueinander parallel sind.

Ax 6: Haben zwei Ebenen ε, φ einen Punkt S gemeinsam, so muß es noch einen weiteren Punkt T $(\neq S)$ geben, der in beiden Ebenen liegt. Nach Ax 4 muß dann $s = ST$ in ε und φ liegen: $s = \varepsilon \cap \varphi$. Die beiden Ebenen haben eine Schnittgerade. Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben.

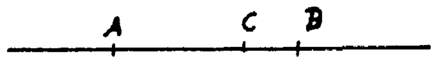
<u>Satz 1</u>: Schneiden sich zwei Ebenen in einer Geraden, so trifft jede Gerade der einen Ebene die andere in einem Punkt, der auf der Schnittgeraden liegt oder sie ist zur Ebene und zur Schnittgeraden parallel.

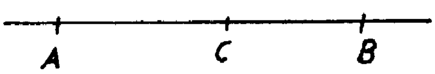
Aus $a \subset \varepsilon$ und $a \cap \varphi = \{A\}$ folgen $A \in a$, also $A \in \varepsilon$ bzw. $A \in \varphi$ und somit $A \in s = \varepsilon \cap \varphi$. Ist $a \parallel \varphi$, d.h. $s \cap \varphi = \{\ \}$, so muß auch $a \cap s = \{\ \}$ sein, weil $a \cap s = \{S\}$ den Widerspruch $a \cap \varphi = \{S\}$ ergeben würde.

<u>Satz 2</u>: Schneiden sich je zwei von drei Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ in einer Geraden $s_{12} = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, $s_{23} = \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3$, $s_{31} = \varepsilon_3 \cap \varepsilon_1$ und sind diese verschieden; $s_{12} \neq s_{23} \neq s_{31}$, so gehen diese Schnittgeraden durch einen Punkt oder sie sind parallel.

s_{12} liegt ja in ε_1 und ε_2. Nach Satz 1 muß daher $\{S\} = s_{12} \cap \varepsilon_3$ auf $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_3 = s_{13}$ und $\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = s_{23}$ liegen. Die drei Geraden gehen durch S. Ist $s_{12} \cap \varepsilon_3 = \{\ \}$, so werden auch $s_{12} \cap s_{23} = s_{12} \cap s_{31} = \{\ \}$, also die drei Geraden parallel sein.

<u>Ax 7</u>: Sind A,B,C drei Punkte einer Geraden, so liegt genau einer zwischen den beiden anderen.



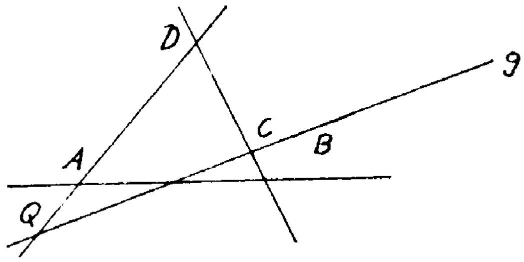


In der Figut liegt C zwischen A und B. Die Strecke (AB) ist die Menge aller Punkte zwischen A und B. A,B sind ihre Endpunkte. Zwischen A und B sind ihre Innenpunkte. Alle übrigen Punkte der Geraden AB sind die Außenpunkte.

<u>Ax 8</u>: Sind A,C Punkte der Geraden g, so gibt es mindestens einen Punkt B, so daß C zwischen A und B liegt.

Ist $C \notin AB$, so bilden die drei Punkte das Dreieck (ABC), (AB), (BC), (CA) sind seine Seiten und A,B,C die Eckpunkte.

Ax 9: Geht eine Gerade durch keinen Eckpunkt eines Dreiecks, schneidet sie jedoch eine Seite, so muß sie noch genau eine weitere Seite schneiden.



Jede Strecke (AB) hat demnach einen Innenpunkt. Es gibt ja nach Ax 2 einen Punkt $C \notin g = AB$ und nach Ax 8 einen Punkt P, für den C zwischen B und P auf BC liegt. Ebenso gibt es auf AP einen Punkt Q mit A zwischen P und Q (wieder nach Ax 8!). $g = QC$ muß dann nach Ax 9 (AB) in einem Innenpunkt schneiden.

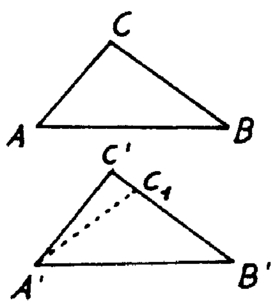
Ist $O \in a$ und ebenso $A \in a$, so erfüllen alle Punkte $X \in a$, die Strecken (AX) bilden, für die O Außenpunkt ist, eine Halbgerade a_1 von a, die sich auf der einen Seite von O erstreckt. Alle übrigen Punkte der Geraden bilden die komplementäre Halbgerade a_2 von a. Ist $a \cap b = \{O\}$, so bilden $\sphericalangle(a_1 b_1)$, $\sphericalangle(b_1 a_2)$, $\sphericalangle(a_2 b_2)$, $\sphericalangle(b_2 a_1)$ vier Winkel. Dabei sind $\sphericalangle(a_1 b_1) = \sphericalangle(a_2 b_2)$ und ebenso $\sphericalangle(a_2 b_1) = \sphericalangle(a_1 b_2)$ Scheitelwinkel. Sie sind immer gleich. Sind alle vier Winkel gleich, so werden sie Rechte Winkel mit der Maßzahl 90° (Altgrad) genannt. Sie ergeben zusammen den Vollen Winkel 360°. Zwei Rechte Winkel ergeben 180°, den Gestreckten Winkel, dessen Schenkel komplementäre Halbgerade sind. Es ist immer $\sphericalangle(a_1 b_1) + \sphericalangle(b_1 a_2) = 180°$. Zwei Nebenwinkel ergeben zusammen 180°.

Ax 10: Ist $\sphericalangle(a,b)$ und a' eine Halbgerade, so gibt es in einem vorgegebenen Sin eindeutig eine weitere b', für die $\sphericalangle(ab) = \sphericalangle(a'b')$ ist.

<u>Ax 11</u>: Sind $(AB) \subset g$ und $A' \in g'(g)$, so gibt es auf jeder Seite von A' auf $g'(g)$ einen Punkt $B' \in g'(g)$ für den $(AB) = (A'B')$ ist.

<u>Ax 12</u>: Für zwei Strecken (AB) und (BC) auf g und (A'B'), (B'C') auf g', die jedesmal keinen Innenpunkt gemeinsam haben, folgt aus $(AB) = (A'B')$, $(BC) = (B'C')$ immer $(AC) = (A'C')$.

<u>Ax 13</u>: Ist bei den Dreiecken (ABC) und (A'B'C') : $(AB) = (A'B')$, $(AC) = (A'C')$ und $\sphericalangle(BAC) = \sphericalangle(B'A'C')$, so gilt $\sphericalangle(ABC) = \sphericalangle(A'B'C')$ und damit auch $\sphericalangle(ACB) = \sphericalangle(A'C'B')$.



Es muß dann auch $(BC) = (B'C')$ sein. Denn wäre $(BC) = (B'C_1)$, so müßte nach Ax 13 $\sphericalangle(BAC) = \sphericalangle(B'A'C_1) = \sphericalangle(B'A'C')$ sein, was wegen Ax 10 nur für $C' = C_1$ möglich ist.

<u>Satz 3</u>: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent. D.h. entsprechende Seiten und Winkel sind gleich.

<u>Satz 4</u>: Ist im Dreieck (ABC) $(AB) = (AC)$, so müssen auch $\sphericalangle(ABC) = \sphericalangle(ACB)$ sein.

Nach Ax 13 sind ja (ABC) und (ACB) kongruent.

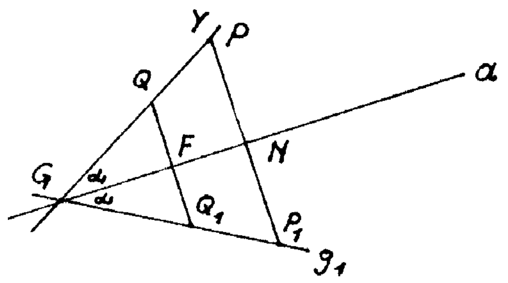
<u>Satz 5</u>: Sind bei den Dreiecken (ABC) und (A'B'C') $(AB) = (A'B')$, $\sphericalangle(BAC) = \sphericalangle(B'A'C')$ und $\sphericalangle(ABC) = \sphericalangle(A'B'C')$, so sind sie kongruent.

Wäre $(BC) = (B'C_1)$, so müßten die Dreiecek (ABC) und (ABC_1) kongruent sein. Daraus folgt $\sphericalangle(BAC) = \sphericalangle(B'A'C_1) = \sphericalangle(B'A'C')$, was nach Ax 10 nur möglich ist, wenn $C' = C_1$, also Satz 5 gilt.

<u>Satz 6</u>: Die in Satz 11 postulierte Streckenübertragung ist eindeutig.

Wäre nämlich $(AB) = (A'B') = (A'B_1)$, dann ergibt ein, nach Ax 2 existierender Punkt $C' \notin g' (= A'B')$ die nach Satz 3 kongruenten Dreiecke $(A'B'C')$ und $(A'B_1C')$. Damit müßte $\sphericalangle(A'C'B') = \sphericalangle(A'C'B_1)$ sein, was nach Ax 10 nur für $B' = B_1$ möglich ist.

Ist a eine Gerade der Ebene, so kann in der folgenden Weise jedem ihrer Punkte P einer P_1 zugeordnet werden: Man verbindet $A \in a$ (Ax 2) mit P, überträgt den Winkel $\alpha = \sphericalangle(aAP)$ an a weiter und trägt auf diesem Schenkel $(AP) = (AP_1)$ auf. Dabei sollen P und P_1 auf verschiedenen Seiten von a liegen. Es sind dann die Dreiecke (ANP) und (ANP_1) kongruent, was $\sphericalangle(ANP) = \sphericalangle(ANP_1) = 90°$ (Nebenwinkel) ergibt. $n = PP_1$ schließt mit a einen Rechten Winkel ein und $(PN) = (NP_1)$. Diese Abbildung ist die Spiegelung an a, die <u>Geradenspiegelung</u> mit der Achse a.; $P_1 = S_a(P)$. Es ist offenbar auch $P = S_a(P_1)$. S_a ist mit der inversen Abbildung identisch. Sie ist involutorisch. Eine Gerade g schneidet a in G; $g \cap a = \{G\}$.



Nach Ax 13 sind die Dreiecke (GNP) und (GNP_1) kongruent. Damit ist $\sphericalangle(GNP) = \alpha = \sphericalangle(GNP_1)$ für jeden Punkt von g. Nach Ax 10 müssen $P_1, Q_1, \ldots$ auf der Geraden g_1 durch G liegen.

<u>Satz 7</u>: Bei einer Geradenspiegelung gehen Gerade in Gerade, Strecken in Strecken über und entsprechende Strecken sind gleich: $(PQ) = (P_1Q_1)$.

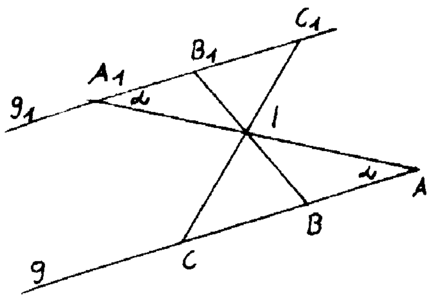
Die Punkte von a sind Fixpunkte. a ist Fixpunktgerade. Die Geraden n, die auf a normal stehen sind Fixgerade. Auf ihnen werden die Punkte in einer Punktspiegelung vertauscht. Ihr Zentrum ist $n \cap s = \{N\}$.

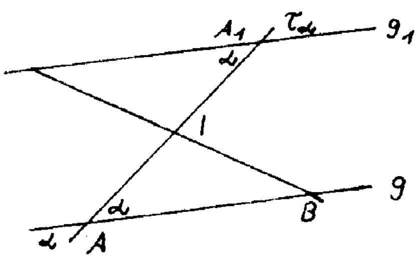
Eine Punktspiegelung S_I bekommt man, wenn man die Punkte P des Raumes mit einem festen Punkt I, dem Spiegelungszentrum verbindet und auf dieser Geraden PI die Strecke (PI) von I weiter aufträgt; $(PI) = (IP_1)$, $P_1 = S_I(P)$. Es ist dann auch $P = S_I(P_1)$. S_I ist involutorisch. Sie stimmt mit ihrer inversen Abbildung überein. I ist der einzige Fixpunkt. Alle Geraden durch I sind Fixgerade und alle Ebenen, die I enthalten Fixebenen. Bei einer Punktspiegelung S_I einer Ebene ϵ (Fixebene) geht eine Gerade $g \subset \epsilon$, die I nicht enthält, in eine Gerade $g_1 \subset \epsilon$ über. $A,B,C \in g$ ergeben ja $A_1 = S_I(A)$, $B_1 = S_I(B)$, $C_1 = S_I(C)$. Nach Ax 13 sind (IAB), (IA_1B_1) und (IAC), (IA_1C_1) zwei Paare kongruenter Dreiecke. Nach Ax 10 müssen die Winkel in A und in A_1 gleich sein. A_1, B_1, C_1 liegen auf einer Geraden g_1; $g_1 = S_I(g)$. Es ist auch $g = S_I(g_1)$. Aus $g \cap g_1 = \{P\}$ würde sich $g_1 \cap g = \{P_1\}$ ergeben, woraus nach Ax 1 $P = P_1 = I$ folgt. Wenn g, wie angenommen, nicht durch I geht, muß $g \cap g_1 = \{\ \}$ sein.

Satz 8: Bei einer Punktspiegelung geht jede, nicht durch das Zentrum gehende Gerade, in eine zu ihr parallele Gerade über.

Jede Strecke geht in eine zu ihr parallele gleichlange Strecke über. Sind nun g, g_1 zwei parallele Gerade und t eine sie beide schneidende Gerade, eine Transversale; $t \cap g = \{A\}$, $t \cap g_1 = \{A_1\}$, so können wir auf g B annehmen (Ax 2) und auf g_1 B_1 so bestimmen, daß $(AB) = (A_1B_1)$ ist (Ax 11). B und B_1 mögen auf verschiedenen Seiten von t liegen. Es ergibt sich dann $AA_1 \cap BB_1 = \{I\}$ und S_I führt (AB) in (A_1B_1) über. I ist der Mittelpunkt von (AA_1) und (BB_1). Die Dreiecke (ABI) und (A_1B_1I) sind kongruent und damit die gleichstimmigen und entgegenstimmigen Parallelwinkel in A und A_1 gleich.

<u>Satz 9</u>: Die gleichstimmigen und entgegenstimmigen Parallelwinkel, die sich beim Schnitt einer Geraden (Transversalen) mit zwei parallelen Geraden ergeben, sind gleich.

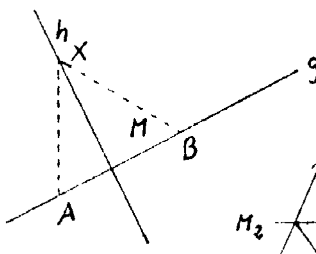


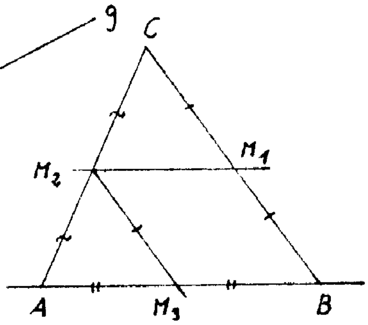


Sind a,b und c,d zwei Paare paralleler Geraden, die verschiedene Richtung haben, so bestimmen diese das Parallelogramm (ABCD). Es wird durch (AC) in die Dreiecke (ABC) und (ADC) zerlegt. Sie stimmen in der Seite (AC) und nach Satz 9 in den ihr anliegenden Winkeln überein. Sie sind nach Satz 5 kongruent. Es müssen daher (AB) = (CD) und (AD) = (BC) sein.

<u>Satz 10</u>: Zwei Parallelenpaare, die nicht die gleiche Richtung haben, bestimmen ein Parallelogramm. In einem solchen sind gegenüberliegende Seiten gleich.

Ist M der Mittelpunkt der Strecke (AB) und n die durch M gehende Normale zu AB, so sind für jedem Punkt X von n die Dreiecke (AMX) und (BMX) kongruent. Sie stimmen ja in (AM) = (BM), (MX) und den von ihnen eingeschlossenen (Rechten) Winkel überein. (Ax 13) (AX) = (BX).





Legt man durch den Mittelpunkt M_2 der Seite (AC) des Dreiecks (ABC) die nach Ax 13 eindeutig existierenden Parallelen zu AB und BC, so sind die Dreiecke (AM_2M_3) und (M_2M_1C) wegen Satz 5 kongruent. Es wird daher $(M_1M_2) = (AM_3)$, $(M_2M_3) = (CM_1)$, was weiter nach Satz 10 $(M_2M_3) = (BM_1)$

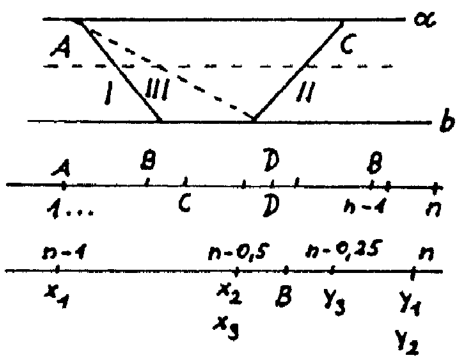
und $(M_1M_2) = (BM_3)$ und demnach $(AM_3) = (BM_3)$, bzw. $(CM_1) = (BM_1)$ ergibt. M_1 ist der Mittelpunkt von (BC) und M_3 der von (AB).

Satz 11: Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist zur dritten Seite parallel und halb so lang wie diese.

Sind a,b zwei parallele Gerade, $A \in a$, $B \in b$, bzw. $C \in a$, $D \in b$, I der Mittelpunkt von (AB) und II der von (CD), so ist I II zu a und b parallel. Nach Satz 11 geht die Parallele zu b durch I durch den Mittelpunkt III von (AD) und aus dem gleichen Grund durch II.

Satz 12: Die Mittelpunkte der Streeken, die ihre Endpunkte auf zwei parallelen Geraden haben, liegen auf einer Geraden, der Mittellinie des von den Parallelen gebildeten Streifens.

Ax 14: (Archimedisches Axiom): Sind auf einer Geraden vier Punkte A,B,C,D gegeben, so gibt es eine Anzahl n, daß das n-malige Hintereinanderauftragen der Strecke (CD) von A aus, auf der B tragenden Halbgeraden, über diesen Punkt hinausführt.



Es ist nun möglich jeder Strecke (AB) eine Längenmaßzahl $\overline{AB}$ zuzuordnen. Schreibt man nämlich der Strecke (CD) die Länge $\overline{CD} = 1$ zu - Einheitsstrecke -, so kann diese nach Ax 14 in (AB) (n-1)-mal untergebracht werden. Es gibt dabei zwei Möglichkeiten: entweder ist dadurch (AB) vollständig erfaßt, oder es bleibt noch eine Teilstrecke (B'B) übrig. Im ersten Fall hat (AB) die Länge $\overline{AB} = n-1$. Im zweiten Fall liegt B in der Strecke, die dem abgeschlossenen Intervall $[x_1 | y_1]$, mit $x_1 = n-1$ und $y_1 = n$ entspricht.

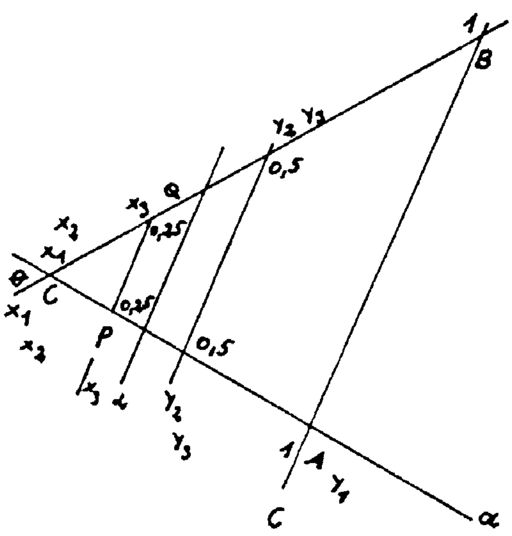
Ihre Länge ist 1. Der Mittelpunkt der Strecke ergibt die Teilintervalle $[n-1 | n-0,5]$ und $[n-0,5 | n]$. Sie haben beide die Länge 0,5. Es kann nun B mit diesem Mittelpunkt zusammenfallen. Dann hat (AB) die Länge $\overline{AB} = n-0,5$. Im anderen Fall liegt B in einer der Teilstrecken. Das, ihr zugehörige Intervall soll $[x_2 | y_2]$ bezeichnet werden. Man erreicht so, entweder nach endlichvielen Schritten den Punkt B oder bekommt eine Folge von Strecken (Intervallen), bei der jede ihren (jedes seinen) Nachfolger enthält. Dabei handelt es sich um abgeschlossene Strecken (Intervalle), d.h. die Endpunkte und die ihnen entsprechenden Zahlen werden jedesmal dazugenommen. Man nennt eine solche Menge von Strecken (Intervallen) eine Streckenschachtelung (Intervallschachtelung). Es ist plausibel, daß für die eben beschriebene Schachtelung gilt:

<u>Ax 15</u>: (Cantor-Dedekinsches Stetigkeitsaxiom der Geraden): Jede Schachtelung von abgeschlossenen Strecken (Intervallen), die sich von einer Strecke (einem Intervall) ausgehend durch fortgesetztes Halbieren ergibt, legt einen Punkt (eine Zahl) fest.

Jedem Punkt B der Geraden entspricht so eine Zahl. Sie kann als Dezimalzahl mit endlichvielen oder unendlichvielen Stellen geschrieben werden. Die Zahl ist die Längenmaßzahl der Strecke (AB).

Werden die Schenkel a, b eines Winkels $\gamma = \measuredangle(a,b)$ von den zwei parallelen Geraden c und d geschnitten, so bekommt man auf a die Punkte A, P und auf b die Punkte B, Q. Wählt man für die Streckenmessung auf a die Einheitsstrecke $\overline{AC} = 1$ und C als Nullpunkt, so entspricht dem Punkt A die Zahl 1. Analog ergibt sich auf b für die Einheitsstrecke $\overline{BC} = 1$, wenn dem Punkt C wieder 0 zugehört, für B auch die Zahl 1. Den Mittelpunkten H und M von (AC) bzw. (BC) entspricht dann jedesmal 0,5. Nach Satz 11 ist HM zu c und d parallel.

Die Punkte P und Q, für die $a \cap d = \{P\}$ und $b \cap d = \{Q\}$ ist, liegen in den Strecken (AC) bzw. in (BC). Diesen Strecken entspricht jedesmal das Intervall $[x_1 | y_1] = [0 | 1]$. Es wird durch die Mittelpunkte in $[0 | 0{,}5]$ und $[0{,}5 | 1]$ zerlegt. In einer der entsprechenden Strecken liegen P bzw. Q. $[x_2 | y_2]$ sei das Intervall, das diesen Teilstrecken gemeinsam gehört. Setzt man diesen Vorgang fort, so bekommt man durch das fortgesetzte Halbieren eine Folge $\{[x_n | y_n]\}$ von Intervallen in der jedes seinen Nachfolger enthält, eine Intervallschachtelung. Dabei sind die Verbindungsgeraden der zu x_n gehörenden Punkte auf a und b und ebenso die den y_n entsprechenden zu $AB = c$, $PQ = d$ nach Satz 11 und Satz 12 parallel und begrenzen einen Streifen, der $d = PQ$ enthält.



Die beiden Streckenschachtelung auf a und b legen nach Ax 15 die Punkte P und Q fest. Beiden Streckenschachtelungen entspricht die gleiche Intervallschachtelung. Das bedeutet, daß die beiden Zahlen p und q, die P und Q zugehören, gleich sein müssen:

$$p = q = \overline{CP}/\overline{CA} = \overline{CQ}/\overline{CB},\quad \overline{CP} : \overline{CA} = \overline{CQ} : \overline{CB}.$$

<u>Satz 13</u> (Strahlensatz): Werden die Schenkeln eines Winkels von zwei parallelen Geraden geschnitten, die nicht durch seinen Scheitel gehen, so stehen, die auf beiden Schenkeln vom Scheitel bis zu diesen Schnittpunkten gemessenen Strecken, im gleichen Verhältnis.

Da $\overline{AP} = \overline{AC} - \overline{PC}$ ist, wird $\overline{AP} : \overline{PC} = \overline{AC}/\overline{PC} - 1 = \overline{BC}/\overline{QC} - 1 = (\overline{BC} - \overline{QC}) : \overline{QC} = \overline{BQ} : \overline{QC}$.
Legt man durch Q die Parallele zu a, so schneidet diese c in $\bar{A}$.

Nach dem eben gezeigten Sachverhalt ist

$$\overline{AB} : \overline{PQ} = \overline{AB} : \overline{AA} = \overline{BC} : \overline{QC}$$

und damit weiter:

$$= \overline{AC} : \overline{PC}.$$

<u>Satz 14</u>: Auf nicht durch den Scheitel eines Winkels gehenden parallelen Geraden werden von den Schenkeln Strecken begrenzt, deren Verhältnis gleich dem der vom Scheitel gemessenen Abschnitte auf den Schenkeln ist.